Contrastes de autocorrelación

Marco González[*] *e Ignacio Lobato*[**]

Sumario

En este trabajo se explican los diferentes contrastes utilizados para probar la hipótesis nula de que una serie de tiempo estacionaria no presenta autocorrelación de orden K. En primer lugar se analiza el estadístico Q_K de Box-Pierce, explicando en qué contexto y bajo qué supuestos es válido. Posteriormente se expone una extensión de éste basado en Lobato, Nankervis y Savin [2001a], llamado Q_K^*, al igual que sus ventajas. Finalmente, se hace un repaso de otros contrastes propuestos para probar esta hipótesis.

Clasificación JEL: C11, C22.

1. Introducción

En los años setenta, Box y Jenkins desarrollaron una metodología sencilla para analizar y predecir series de tiempo, la cual se volvió muy utilizada. Con esta metodología, se estiman modelos ARMA[1] para las series económicas. Para determinar si el modelo propuesto es aceptable, se observan las autocorrelaciones de los errores estimados, esperando que se comporten como ruido blanco.[2] El criterio propuesto para determinar si lo anterior es cierto es el estadístico Q_K de Box-Pierce [1970]. En esta prueba, la hipótesis nula es que las primeras K autocorrelaciones de la serie considerada son 0. El interés en esta hipótesis se debe a que se presenta a menudo en series de tiempo de finanzas y economía, además de ser la prueba propuesta para determinar si el modelo ARMA de Box y Jenkins está bien especificado. A pesar de que la práctica común es reportar el estadístico Q_K de Box-Pierce para probar esta hipótesis, como se verá en la

---

[*] Estudiante de la licenciatura en economía del ITAM.

[**] Departamento de Economía y Centro de Investigación Económica, ITAM. Se agradece el apoyo financiero de la Asociación Mexicana de Cultura.

[1] Un modelo ARMA (*autoregressive-moving average process*) es un caso mixto en el que se tiene tanto un proceso autoregresivo como uno de media móvil. Ver Hamilton [1994].

[2] Se define a un proceso como ruido blanco si cada observación tiene media cero, la misma varianza finita y la correlación entre las observaciones es cero.

siguiente sección, este estadístico de prueba sólo es válido si existe independencia estadística. Es decir, si los errores son independientes e idénticamente distribuidos, la Q_K de Box-Pierce seguirá una distribución asintótica χ^2. Sin embargo, se sabe que en muchas series la independencia estadística es un supuesto que simplemente no se cumple. Por lo tanto, el uso tan diseminado de este estadístico de prueba aun en casos en que sus supuestos no son válidos implica que se realizan inferencias erróneas y pone en duda los resultados de muchos estudios. Frente al problema de qué hacer si no se respeta el supuesto de que los datos son idénticos e independientemente distribuidos (iid), se tienen las siguientes opciones:

i) Ver otros estadísticos de prueba que se distribuyan como una χ^2_K

i) Usar Q_K, pero utilizando los valores críticos que da el *bootstrap*, los cuales funcionan mejor que la Q_K

ii) Utilizar otros contrastes

En este artículo se desarrollan, en la segunda sección, los supuestos que permiten utilizar correctamente el estadístico de Box-Pierce. En la tercera se propone un estadístico Q_K^* que es válido en condiciones menos restrictivas que la independencia estadística basado en Lobato *et al*. [2001a], que formaría parte de la solución tipo i), mientras que en la cuarta se discuten otros estadísticos de prueba y formas de superar este problema. Por último, en la quinta sección se exponen las conclusiones.

2. Q_K de Box-Pierce

Como se mencionó en la introducción, Box y Pierce [1970] propusieron utilizar el estadístico Q_K para probar la hipótesis nula de que las primeras K autocorrelaciones de una serie de tiempo débilmente estacionaria[3] son cero. Es decir, se quiere saber si la muestra apoya la conjetura de que $_1=\ _2=...=\ _K=0$, donde $_j$=Cov (y_t,y_{t+j})/V(y).

Sea $y_1, \ldots, y_n$, una serie de tiempo real débilmente estacionaria con media μ. Defínase a la autocovarianza de rezago j como:

$$\gamma(j) = \mathrm{E}[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)],$$

y a la autocorrelación de rezago j como:

[3] Se dice que una serie es débilmente estacionaria si cada observación tiene la misma media, misma varianza finita y si la covarianza entre las observaciones sólo depende de la distancia entre ellas; es decir si $E(x_t)=\mu$, $V(x_t)=\sigma^2<\infty$ y $Cov(x_t, x_{t+j})=\gamma(j)$.

$$\rho(j) = \gamma(j)/\gamma(0).$$

Por analogía, se define a la media muestral como:

$$\hat{\mu} = (1/n)\sum_{t=1}^{n} y_t \ ,$$

y a la autocovarianza muestral de rezago j como:

$$\hat{\gamma}(j) = \frac{\sum_{t=j+1}^{n} \left[(y_t - \hat{\mu})(y_{t-j} - \hat{\mu}) \right]}{n} \ .$$

Por la misma lógica, el estimador de las autocorrelaciones es $r(j) = \hat{\gamma}(j) / \hat{\gamma}(0)$.

Establecido lo anterior, se tiene que el estadístico Q_K Box-Pierce se define como el tamaño de la muestra multiplicado por la suma de cuadrados de las primeras K autocorrelaciones muestrales, es decir:

$$Q_K = n \sum_{j=1}^{K} r(j)^2 \ .$$

Si los elementos de la serie son independientes e idénticamente distribuidos, la matriz de varianzas-covarianzas del vector de autocorrelaciones muestrales es, asintóticamente, la matriz identidad dividida por el tamaño muestral. Por lo tanto, bajo la hipótesis nula, Q_K se distribuye asintóticamente como χ^2 con K grados de libertad, siempre y cuando las observaciones sean independientes e idénticamente distribuidas. Si se cumple lo anterior, la inferencia realizada con el estadístico de Box-Pierce es adecuada, por lo que si $Q_k < \chi^2_{K,\alpha}$, entonces se acepta la hipótesis nula.

Sin embargo, la realidad es que para muchas series de tiempo el supuesto de independencia es cuestionable. Por ejemplo, es bien sabido que en las series de rendimientos financieros existe sustancial correlación de los retornos al cuadrado en los mercados cambiarios y accionarios. Esto implica que, aun si estos no presentan correlación, son estadísticamente dependientes. Por otro lado, Romano y Thombs [1996] han mostrado que para algunos ejemplos especiales en que la serie es incorrelada pero estadísticamente dependiente, el estadístico de Box-Pierce puede producir inferencias equivocadas.

En conclusión, el contraste de Box-Pierce es válido si y sólo si el proceso es Gaussiano. Es decir, si $\left(\sqrt{n}\right)r$ se distribuye asintóticamente como una $N(0,I)$.

3. Q_K^*

3.1. Antecedentes

Debido a que los supuestos a los que alude la construcción del estadístico Q_K son cuestionables, dado que la independencia en muchas series no es sustentable, han surgido métodos alternativos como el desarrollado por Lobato, Nankervis y Savin [2001a] en el que se propone un estadístico Q_K modificado, o Q_K^*, que sigue una distribución χ_K^2. Este último es una extensión del de Box-Pierce, apropiado en entornos caracterizados por cierta dependencia estadística, en el que se utiliza un estimador consistente de la verdadera matriz asintótica de varianzas-covarianzas de las autocorrelaciones muestrales, en vez de la matriz identidad.

Esta extensión ha sido desarrollada para ser utilizada con series de tiempo generadas por secuencias de diferencia en martingala (MDS).[4] Es decir, el estadístico será válido si se cumplen los supuestos de que la serie de tiempo es generada por una secuencia MDS y que la matriz asintótica de varianzas-covarianzas de las autocorrelaciones muestrales es diagonal. Cabe aclarar que el estadístico Q_K* ha sido considerado previamente en la literatura por Diebold [1986], Lo y MacKinlay [1989], Robinson [1991], Cumby y Huizinga [1992], Bollerslev y Wooldridge [1992] y Bera y Higgins [1993]. Para contextos multivariados, se puede consultar a Kyriazidou [1998]. Sin embargo, el estadístico Q_K* no ha sido utilizado como contraste para probar la inexistencia de autocorrelación en aplicaciones económicas y financieras. Cabe señalar que la condición de diagonalidad es satisfecha en muchos modelos financieros, como por ejemplo los GARCH[5] Gaussianos.

3.2. Definición de Q_K^*

La siguiente sección obtiene la fórmula del estadístico Q_K^*. Para esto, explica cuáles son, en general, los elementos de la matriz de varianzas-autocovarianzas, de ahora en adelante *T*. Después de considerar a sus componentes, se hace uso del supuesto de MDS y la diagonalidad de la matriz para simplificarla. Al final, Q_K^* es

[4] X_t sigue una secuencia de diferencia de martingala (MDS) si $E_{t\text{-}1}(x_t)=0$. Este concepto de independencia en media es menos restrictivo que la independencia estadística (ver Goldberger [1991]).

[5] Del inglés *generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model*, propuesto por Bollerslev [1986].

simplemente un estadístico de la forma $nr'\hat{T}^{-1}r$, donde T es reemplazada por un estimador consistente $\hat{T}$, utilizando el principio de analogía.

Utilizando las definiciones anteriores, se sabe que bajo condiciones débiles de dependencia, el vector $n^{1/2}r = n^{1/2}\,[r(1),\ldots, r(K)]'$ es asintóticamente distribuido normal con matriz de varianzas-covarianzas T, cuyo ij-ésimo elemento está dado por:

$$\tau_{ij} = \gamma(0)^{-2}\left[c_{i+1,\,j+1} - \rho(i)c_{1,\,j+1} - \rho(j)c_{1,i+1} + \rho(i)\rho(j)c_{1,1}\right], \qquad (1)$$

donde se define:

$$\begin{aligned} c_{i+1,\,j+1} = \sum_{d=-\infty}^{\infty} & \mathrm{E}(y_t - \mu)(y_{t+i} - \mu)(y_{t+d} - \mu)(y_{t+d+j} - \mu) - \\ & \mathrm{E}(y_t - \mu)(y_{t+i} - \mu)\mathrm{E}(y_{t+d} - \mu)(y_{t+d+j} - \mu). \end{aligned} \qquad (2)$$

El siguiente teorema central del límite puede ser obtenido con dos tipos diferentes de condiciones: i) procesos lineales con innovaciones MDS, como las de Hannan y Heyde [1972]; y ii) procesos estacionarios *mixing* como en Romano y Thombs [1996]:

$$\sqrt{n}\left(r - \rho\right) \Rightarrow N\left(0, T\right).$$

Suponiendo que T es conocida, la hipótesis H_K: $\rho = [\rho(1), \ldots, \rho(K)]' = 0$ puede ser probada utilizando un estadístico de prueba de la forma $nr'T^{-1}r$, el cual asintóticamente sigue una distribución χ^2 con K grados de libertad cuando H_K es cierta. Como se puede ver, el estadístico Q_K de Box-Pierce es un caso especial de este, en el que se sustituye a T con la matriz identidad.

Bajo H_K, la matriz T puede ser simplificada. En particular, τ_{ij} se convierte en $\bar{\tau}_{ij} = \gamma(0)^{-2}[\bar{c}_{i+1,\,j+1}]$ con:

$$\bar{c}_{i+1,j+1} = \sum_{d=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(y_t - \mu)(y_{t+i} - \mu)(y_{t+d} - \mu)(y_{t+d+j} - \mu);\ i,j = 1,\ldots,K.$$

El supuesto de MDS y diagonalidad ayudan a simplificar a T y son utilizados a continuación. Suponiendo que la siguiente condición es satisfecha:

$$\mathrm{E}[(y_t - \mu)(y_{t+i} - \mu)(y_{t+d} - \mu)(y_{t+d+j} - \mu)] = 0;\ i,j = 1,\ldots,K, \qquad (3)$$

para todo d cuando $i \neq j$ (lo cual asegura la diagonalidad de la matriz) y para $d \neq 0$ cuando $i = j$, se tiene que el término $\bar{c}_{i+1,\,j+1}$ se reduce a:

$$c_{j+1,\,j+1}{}^* = \mathrm{E}(y_t - \mu)^2(y_{t+j} - \mu)^2;\ c_{ij}{}^* = 0,\ i \neq j;\ i,j = 1,\ldots,K. \qquad (4)$$

Por lo tanto, bajo la hipótesis nula y la condición (3), la matriz T se convierte en T^*, la cual es diagonal con elementos:

$$\tau_{jj}^* = c_{j+1,j+1}^* / \gamma(0)^2 . \tag{5}$$

Por último, el estadístico Q_K^* se construye reemplazando la matriz diagonal T^* con un estimador consistente de ésta, $\hat{T}^*$, por lo que se define a:

$$Q_K^* = nr'[\hat{T}^*]^{-1} r = n \sum_{j=1}^{K} [r(j)]^2 / \hat{\tau}_{jj}^* , \tag{6}$$

en donde $\hat{\tau}_{jj}^*$ es un estimador consistente de τ_{jj}^*, es decir:

$$\hat{\tau}^*_{jj} = [(1/n) \sum_{t=1}^{n-j} (y_t - \hat{\mu})^2 (y_{t+j} - \hat{\mu})^2 / \hat{\gamma}(0)^2]. \tag{7}$$

Cuando se cumple la condición (3), el estadístico Q_K^* se distribuye asintóticamente como χ^2 con K grados de libertad bajo H_K.

Como se puede notar de (5), Q_K y Q_K^* tienen la misma distribución si los elementos de la serie son independientemente distribuidos. Por otra parte, el estadístico Q_K^* es robusto en el sentido de que la matriz de varianzas-covarianzas utilizada para construirlo se obtiene en condiciones de dependencia estadística, mientras que el estadístico Q_K se deriva suponiendo independencia.

Las propiedades asintóticas de la prueba Q_K^* pueden resumirse en los siguientes lemas:

Sea y_t un proceso estocástico estacionario y ergódico cuyo cuarto momento es finito.

Lema 1. Bajo condiciones que garanticen (5), Q_K^* converge en distribución a la de una χ^2_K

Lema 2. Bajo la hipótesis alternativa, el estadístico de prueba Q_K^* es consistente[6]

Cabe mencionar que para algunos procesos no estacionarios, Q_K^* puede ser utilizado para probar la hipótesis nula de que las autocorrelaciones de rezago j son cero para todo t y $j = 1,\ldots, K$.

Lema 3. Bajo condiciones generales de dependencia débil (por ejemplo White [1980] y Lo y MacKinlay [1989]), Q_K^* converge en distribución a la de χ^2_K

---

[6] La demostración se encuentra en Lobato, Nankervis y Savin [2001a].

Las condiciones supuestas en este último lema incluyen condiciones sobre los momentos y de procesos *mixing* que permiten tener heteroscedasticidad; por ejemplo, véase Campbell *et al*. [1997].

En resumen, si tenemos una serie de tiempo generada por un proceso MDS, sabemos que $\left(\sqrt{n}\right) r \xrightarrow[d]{} N\left(0, T^{*}\right)$, y si se sabe que T^{*} es una matriz diagonal, sus elementos son de la siguiente forma: $\tau^{*}_{jj} = \dfrac{E(y_t - \mu)^2 (y_{t+i} - \mu)^2}{\tilde{a}(0)^2}$, por lo que se les puede estimar siguiendo el principio de analogía con $\hat{\tau}^{*}_{jj} = \dfrac{\frac{i}{n} \sum \left((y_t - \hat{\mu})^2 (y_{t+i} - \hat{\mu})^2\right)}{\hat{\tilde{a}}(0)^2}$. Al tener un estimador consistente de T^{*}, es preferible utilizar el contraste $Q^{*}_{K} = n \sum_{j=1}^{n} \dfrac{r(j)^2}{\hat{\tau}^{*}_{jj}}$, el cual se distribuye como una χ^2_K.

3.3. Desempeño del estadístico de prueba Q_K^* en muestras finitas

En Lobato, Nankervis y Savin [2001a], se comparó el comportamiento en muestras finitas de Q_K y Q_K^* para modelos financieros tipo GARCH y LMSV.[7] Se observó que el estadístico Q_K presenta grandes distorsiones para estos modelos comunes y, lo que es más grave, se encontró que las distorsiones aumentan considerablemente al aumentar el tamaño muestral. Por ejemplo, en uno de los modelos GARCH, se presentó una ERP[8] de 80%, cuando un buen estadístico habría estado cercano al 5%, lo cual es indicativo del pésimo desempeño que puede tener el estadístico de Box-Pierce en presencia de dependencia estadística. Se concluye entonces que la gran ventaja de Q_K^* es la facilidad para calcularlo y su superior desempeño en series de tiempo con el tipo de dependencia señalada.

---

[7] Del inglés *long memory stochastic volatility models*.

[8] La ERP (*empirical rejection probability*) es una estimación de la probabilidad de rechazo del contraste.

4. Otros contrastes

4.1. GP_K , $\tilde{Q}_K$

Los dos siguientes estadísticos son muy parecidos a Q_K y Q_K^* en el sentido de que también son pruebas de la forma $nr'T^{-1}r$ y se distribuyen como χ^2_K . Su diferencia estriba en los supuestos que hacen sobre la forma de T, lo cual es reflejado en las maneras de estimarla.

Primero presentamos al estadístico GP_K , el cual es muy similar a Q_K^* debido a que también se basa en el supuesto de MDS. La diferencia entre ambos consiste en que GP_K contempla elementos diferentes de 0 fuera de la diagonal de T, es decir, no supone diagonalidad. Desarrollado por Guo y Phillips [1998], este caso más general de MDS tiene especial importancia para las series de tiempo financieras y económicas. Por ejemplo, la matriz asintótica de las autocorrelaciones muestrales no es diagonal en los modelos GARCH (1,1) con errores asimétricos.

Para un proceso MDS, los únicos elementos diferentes de cero en T son de la forma $E[(y_t - \mu)^2(y_{t+i} - \mu)(y_{t+j} - \mu)]$. En (2), esto ocurre cuando $d = 0$. La prueba de Guo y Phillips[9] [1998], para la hipótesis H_K, llamada prueba GP_K, aplica sólo para el caso de MDS. El estadístico de prueba GP_K reemplaza a los elementos de la T por los análogos muestrales de $E(y_t - \mu)^2(y_{t+i} - \mu)(y_{t+j} - \mu)$.

Es decir, se define a:

$$\hat{\tau}_{ij}^{GP} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{\mu}\right)^2\left(y_{t+j} - \hat{\mu}\right)\left(y_{t+i} - \hat{\mu}\right).$$

Teniendo a un estimador consistente de T, se calcula el estadístico y se hace la inferencia sabiendo que se distribuye como χ^2_K . Cabe mencionar que para la hipótesis de que un sólo coeficiente de correlación es cero, la prueba Q_1^* es equivalente al estadístico de prueba GP_1.

El estadístico Q_K supone que las observaciones son independientes, y esto es lo que fundamenta su capacidad para probar que están incorreladas. La ventaja de Q_K^* y GP_K es que no hacen el supuesto tan restrictivo de la independencia, sino que suponen procesos que se generan con independencia en media (los cuales son más generales) y con esto pueden probar que una serie no tiene autocorrelación. A continuación se explica un estadístico que tiene la ventaja de no suponer procesos MDS, aunque presenta el inconveniente de que es más difícil de calcular y requiere de la elección arbitraria de un parámetro para poder

---

[9] En su teorema 5.

obtenerse. Para poder derivar la fórmula del estadístico $\tilde{Q}_K$, es necesario acudir a otro teorema central del límite. La demostración de por qué se puede estimar a T consistentemente sin suponer MDS se encuentra en el apéndice, además de la fórmula para hacerlo. Asimismo, en éste se muestra que $\tilde{Q}_K$ es asintóticamente distribuido χ^2_K cuando H_K es verdadera.

Se puede concluir que los estadísticos de prueba presentados hasta ahora se pueden clasificar como estadísticos de prueba de la forma $nr'T^{-1}r$, cada uno haciendo diferentes supuestos sobre T, pero de tal forma que tienen una distribución asintótica χ^2_K bajo la hipótesis nula. Asimismo, se puede señalar que todos son un caso especial de $\tilde{Q}_K$. El estadístico Q_K de Box-Pierce reemplaza a T con la matriz identidad, mientras que la prueba Q_K* reemplaza a T con un estimador que es consistente si la matriz T es diagonal, lo cual se cumple en los procesos MDS Gaussianos. Por su parte, la prueba GP_K reemplaza a T con un estimador que es consistente bajo la hipótesis nula para los procesos MDS en general. Se tiene entonces que la prueba más general de estas cuatro es la de $\tilde{Q}_K$, ya que reemplaza a T con un estimador que es consistente bajo la hipótesis nula tanto para procesos MDS como para los que no caben en esta definición. Sin embargo, el inconveniente del estadístico $\tilde{Q}_K$ es que es necesario escoger el parámetro de suavizado para obtenerlo, además de ser mucho más complicado de calcular que Q_K^* y GP_K, debido a que involucra sumatorias infinitas.

4.2. Estadístico de cociente de varianzas

En finanzas, la hipótesis de mercados eficientes indica que no se pueden predecir y lograr ganancias. Esta afirmación tiene tres variantes o versiones:[10]

a) Los rendimientos financieros son idéntica e independientemente distribuidos; cuya implicación es que $Cov(f(y_t),g(y_{t-1}))=0 \ \forall g(\cdot), f(\cdot)$.

b) $E(y_t | y_{t-1}) = \mu$, llamada independencia en media, cuya implicación es que $Cov(y_t,g(y_{t-1}))=0 \ \forall g(\cdot)$.

c) $Cov(y_t,y_{t-1})=0$

[10] Ver sección de *tests of random walk* de Campbell, Lo y MacKinlay [1997].

Con base en estas definiciones para clasificar a un mercado como eficiente o no, en finanzas se utiliza a menudo para probar la tercera versión de la hipótesis de los mercados eficientes el contraste conocido como cociente de varianzas ($VR(K)$), el cual prueba la misma hipótesis que interesa en este trabajo. Esta prueba se calcula de la siguiente manera:

$$VR_K = 1 + 2\sum_{j=1}^{K-1}\left(1 - \frac{j}{K}\right) * r\left(j\right).$$

Donde $r(j)$ está definido como antes. Para determinar si se acepta o rechaza la hipótesis nula, este estadístico se apoya en que $\sqrt{nK}\left(VR_K - 1\right)$ se distribuye asintóticamente como $N(0,2(K-1))$.

Sin embargo, esta prueba tiene el grave inconveniente de que puede tener cero potencia para ciertas combinaciones lineales de las autocorrelaciones, como se muestra a continuación. Se sabe que

$$V(y_1 + y_2 + y_3) = V(y_1) + V(y_2) + V(y_3) + 2Cov(y_1, y_2) + 2Cov(y_2, y_3) + 2Cov(y_1, y_3).$$

Por otro lado, bajo la hipótesis nula, las $Cov(y_t, y_{t-1})=0$. Es decir, $V(y)=q\boldsymbol{s}^2$. Sin embargo, se puede ver que la hipótesis alternativa de que $_1$ $_2$ ... $_K$ 0 podría darse y tener que las autocovarianzas se cancelan unas con otras, es decir:

$$\sum_{i=1,\, j=1}^{k} Cov(y_j, y_i) = 0 .$$

Esto sucede si se tiene autocorrelación en la serie, pero de tal forma que se cancelan los efectos unos con otros, como se muestra en el siguiente ejemplo: considérese un proceso MA(2) de la siguiente forma:

$$y_t = e_t - 0.4597e_{t-1} + 0.10124e_{t-2} ,$$

donde e_t es ruido blanco. Si se calcula el cociente de varianzas, se tiene que $VR(3)=0$. Es decir, por la manera en que fue generada, a pesar de que existe autocorrelación entre los elementos de la serie, el estadístico de cociente de varianzas no la detecta y realiza una inferencia errónea. Por lo tanto, además de que se puede concluir que este contraste no es confiable, se puede decir que el estadístico Q_K* es preferible al cociente de varianzas para realizar esta prueba de hipótesis.

4.3. Bootstrap

Recientemente se ha desarrollado un novedoso método para probar la hipótesis de cero autocorrelación basado en el método *bootstrap*, cuyos detalles se pueden encontrar en Horowitz, Lobato, Nankervis y Savin [2001]. En ese documento se concluye que este método tiene un desempeño aceptable siempre y cuando la serie de tiempo presente una curtosis moderada. La prueba propuesta por estos autores está basada en el estadístico de Q_K de Box-Pierce, pero que hace inferencia a partir de los valores críticos basados en el *bootstrap*, sin considerar los valores críticos indicados por la χ^2_K. El procedimiento *bootstrap* proporciona una aproximación de primer orden a la distribución de Q_K bajo la hipótesis nula. Es decir, bajo este enfoque no se trata de mejorar al estadístico de prueba, sino que se genera una aproximación a su distribución bajo la hipótesis nula. Por lo tanto, la hipótesis nula puede ser probada comparando el estadístico Q_K con un valor crítico basado en la distribución que genera el *bootstrap*, o lo que es equivalente, comparando el valor P[11] basado en éste contra α, la probabilidad nominal de cometer el error tipo I. Horowitz, Lobato, Nankervis y Savin [2001] recomiendan una prueba con las características anteriores en la que el *bootstrap* se implementa utilizando un procedimiento de bloques de bloques doble con preblanqueo.[12]

El *bootstrap* en bloques es un procedimiento para generar muestras de una serie de tiempo cuando un modelo paramétrico no está disponible. Éste consiste en dividir los datos en bloques y llevar a cabo muestras aleatorias del conjunto de bloques con reemplazo. Bajo condiciones de regularidad poco rígidas, el *bootstrap* en bloques proporciona una aproximación de primer orden a la distribución del estadístico de prueba. En otras palabras, el *bootstrap* en bloques produce una distribución empírica asintótica correcta mientras que la aproximación χ^2_K no lo hace en caso de que no se cumpla el supuesto de independencia. De hecho, Romano y Thombs [1996] han propuesto utilizar el *bootstrap* en bloques para realizar inferencias robustas acerca de las autocorrelaciones individuales en presencia de dependencia estadística. Sin embargo, cabe notar que el inconveniente de este estadístico consiste en que se tiene que elegir el tamaño del bloque de manera arbitraria.

---

[11] El valor P o nivel de significancia marginal es el nivel al que el estadístico de prueba observado sería apenas significativo. Es decir, el valor P es aquel en el que la hipótesis nula sería rechazada para todos los niveles de significancia mayores a P, y aceptada para todos los niveles de significancia menores a P.

[12] La técnica de preblanqueo implica ajustar un modelo inicial sencillo, como un $AR(1)$, a los datos y trabajar sólo con los residuos.

4.4. Estadístico *T*

El último estadístico analizado proviene de una prueba reciente que fue desarrollada por Lobato [2001] para probar que un proceso dependiente es incorrelado. Ésta cuenta con algunas ventajas con respecto a las pruebas que hemos analizado. A diferencia de los estadísticos $\tilde{Q}_K$ y la Q_K con valores del *bootstrap*, el individuo que realiza la prueba no necesita escoger ningún número de manera arbitraria para implementarla. Tampoco requiere, como es necesario con los estadísticos Q_K^* y GP_K, suponer que la serie se genera por un proceso MDS. Por ejemplo, con el procedimiento *bootstrap* se requiere que el usuario seleccione a su arbitrio la longitud de los bloques, lo cual es desventajoso en el sentido de que no existe teoría estadística que indique cuál es el tamaño óptimo de los bloques. El problema con que el usuario escoja parámetros de forma arbitraria es que la inferencia estadística puede ser sensible a la selección del parámetro. La ventaja de la prueba alternativa propuesta por Lobato es que la distribución asintótica del estadístico de prueba bajo la hipótesis nula no contiene ningún parámetro desconocido y no necesita que el usuario seleccione ningún número. La distribución asintótica bajo la hipótesis nula del estadístico propuesto no es normal, sino que se tabula por medio de simulaciones, la cual está disponible en el artículo citado. Por último, con respecto al desempeño del estadístico propuesto, se tiene el inconveniente teórico de que, asintóticamente, la potencia local es menor que la del *bootstrap* y $\tilde{Q}_K$. Sin embargo, también se encontró la ventaja de que, para muestras finitas, el estadístico *T* controla mejor el error tipo I, sobre todo para muestras pequeñas, y la potencia que se pierde con respecto a los otros dos estadísticos es modesta.

5. Conclusión

En este artículo se analizaron las diferentes maneras en que se puede inferir que en una serie de tiempo estacionaria no existe autocorrelación durante *K* periodos. Se encontró que el estadístico más utilizado para este fin, el de Box-Pierce, no es adecuado si la serie presenta alguna forma de dependencia estadística. El hecho de que no es razonable contemplar este supuesto para muchas series de tiempo económicas y financieras llevó a explorar otros estadísticos. Se encontró que en caso de que exista alguna forma de dependencia, existen pruebas estadísticas superiores a la Q_K de Box-Pierce. Los otros estadísticos analizados fueron la Q_K* (Diebold [1986], Lo y MacKinlay [1989] y Lobato, Nankervis y Savin [2001a]), el GP_K (Guo y Phillips [1998]), la prueba $\tilde{Q}_K$ (Lobato, Nankervis y Savin [2001b]), y se comentó el estadístico *T* (Lobato [2001]) y el Q_K con valores *bootstrap*

(Horowitz, Lobato, Nankervis y Savin [2001]). Definir si algún estadístico de los analizados en este artículo es superior a otro requiere de algún método de valoración. Se pueden considerar tres maneras relevantes para clasificarlos. La primera de ellas es la validez de los estadísticos. En este sentido, se prefiere aquel estadístico que haga menos supuestos sobre el comportamiento de la serie. Bajo este criterio, los mejores estadísticos son $\tilde{Q}_K$, T, y el *bootstrap* Q_K, ya que no suponen nada acerca de esto; en segundo lugar tendríamos a GP_K y Q_K^*, los cuales suponen que la serie sigue una MDS, y por último clasificamos a la Q_K, la cual precisa del fuerte supuesto de iid. Bajo el segundo criterio, se prefiere a aquellos estadísticos que no requieren que el usuario seleccione arbitrariamente algún parámetro. En este sentido, $\tilde{Q}_K$, GP_K y Q_K^* y T serían los favoritos, mientras que $\tilde{Q}_K$, y el *bootstrap* Q_K son despreciados. Por último, se clasifica a los estadísticos de acuerdo a su potencia local asintótica. Bajo este aspecto, T tiene el peor desempeño. Se recuerda, asimismo, que el hecho de que Q_K* sea tan simple de calcular y que siempre presente al menos el mismo desempeño que Q_K, lo hace preferible a este último.

6. Referencias

Bera, A., y Higgins, M. (1993) "ARCH models: Properties, estimation and testing," *Journal of Economic Surveys* 7, pp. 305-362.

Bollerslev, T. (1986) "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *Journal of Econometrics* 31, pp. 307-327.

Bollerslev, T y Wooldridge, J. (1992) "Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances," *Econometric Reviews* 11, pp. 143-179.

Box, G. y Pierce, D. (1970) "Distribution of residual autocorrelations in autoregressive integrated moving average time series models" *Journal of the American Statistical Association* 65, pp. 1509-1526.

Campbell, J., Lo, A., y MacKinlay, A. (1997) *The econometrics of financial markets*, Princeton University Press, sección de tests of random walk.

Cumby, R. y Huizinga, J. (1992) "Testing the autocorrelation structure of disturbances in ordinary last squares and instrumental variable regressions," *Econometrica* 60, pp. 185-196.

Davidson, J. y De Jong, R. (2000) "Consistency of kernel estimators of heteroskedastic and autocorrelation covariance matrices" *Econometrica* 68, pp. 407-424.

De Jong, R. y Davidson, J. (2000) "The functional central limit theorem and weak convergence to stochastic integrals I - Weakly dependent processes" *Econometric Theory*, 16, pp. 621-642.

Diebold, F. (1986) "Testing for serial correlation in the presence of heteroskedasticity" *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economics Statistics Section*, pp.323-328.

Goldberger, A. (1991) *A course in econometrics*, Harvard University Press.

Guo, B. y Phillips, P (1998) "Testing for autocorrelation and unit roots in the presence of conditional heteroskedasticity of unknown form" *Cowles Foundation for Research in Economics*, Yale University.

Hamilton, J. (1994) *Time series analysis*, Princeton University Press.

Hannan, E. y Heyde, C. (1972) "On limit theorems for quadratic functions of discrete time series" *Annals of Mathematical Statistics* 43, pp. 2058-2066.

Horowitz, J., Lobato, I., Nankervis, J., Savin, N. (2001) "Bootstraping the Box-Pierce Q test: A robust test of uncorrelatedness".

Kyriazidou, E., (1998) "Testing for serial correlation in multivariate regression models" *Journal of Econometrics* 86, pp. 193-220.

Lo, A. y MacKinlay, A. (1989) "The size and power of the variance ratio test in finite samples: A monte carlo investigation" *Journal of Econometrics* 40, pp. 203-238.

Lobato, I. (2001) "Testing that a dependent process is uncorrelated", *Journal of the American Statistical Association*, vol.96, pp.1066-1076.

Lobato, I., Nankervis, J. y Savin, N. (2001a) "Testing for autocorrelation using a modified Box-Pierce *Q* test" *International Economic Review* 42, pp. 187-205.

Lobato, I., Nankervis, J., Savin, N. (2001b) "Testing for zero autocorrelation in the presence of statistical dependence", *Journal of Econometric Theory*, próxima aparición.

Robinson, P. (1991) "Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regression," *Journal of Econometrics* 47, pp. 67-84.

Romano, J. y Thombs, L. (1996) "Inference for autocorrelations under weak assumptions" *Journal of the American Statistical Association* 91, pp. 590-600.

Taylor, S. (1984) "Estimating the variances of autocorrelations calculated from financial time series" *Applied Statistics* 33, pp. 300-308.

White, H. (1980) "A heteroskedasticity consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity," *Econometrica* 48, pp. 817-838.

7. Apéndice

En este apéndice se demuestra que el estadístico $\tilde{Q}_K$ utiliza una estimación consistente de T, y que se distribuye como χ^2_K, además de señalar la fórmula para hacerlo.

Denótese al vector de autocovarianzas muestrales como $\hat{g} = (\hat{g}(0), \hat{g}(1), ..., \hat{g}(K))'$, y al vector de autocovarianzas en la población por $g = (g(0), g(1), \ldots, g(K))'$. El vector $w_t = (w_{1t}, \ldots, w_{Kt})'$ tiene como k-ésimo componente a $w_{kt} = (y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)$ para $k = 1, \ldots K$, mientras que $\hat{w}_t = (\hat{w}_{1t}, ..., \hat{w}_{Kt})'$ tiene como su k-ésimo componente a $\hat{w}_{Kt} = (y_t - \hat{\mu})(y_{t-K} - \hat{\mu})$ para $k = 1, \ldots K$.

Supóngase de nuevo que y_t es un proceso con dependencia débil para el cual el vector de autocovarianzas muestrales $\hat{g}$ satisface el siguiente teorema central del límite:

$$\sqrt{n}(\hat{g} - g) \Rightarrow N(0, C),$$

donde C (que se supone finita y definida positiva) es 2π por la matriz de densidad espectral en la frecuencia cero del vector w_t y tiene como su ij-ésimo elemento:

$$c_{ij} = \sum_{d=-\infty}^{\infty} \{E(y_t - \mu)(y_{t-i} - \mu)(y_{t+d} - \mu)(y_{t+d-j} - \mu) - E(y_t - \mu)(y_{t-i} - \mu)E(y_{t+d} - \mu)(y_{t+d-j} - \mu)\};$$
$$i, j = 0, 1, ..., K.$$

Una aplicación directa del método delta lleva, a su vez, a un CLT para las autocorrelaciones muestrales:[13]

$$\sqrt{n}(r - \rho) \Rightarrow N(0, T)$$

[13] Un supuesto específico con el cual se garantiza que el CLT para $\hat{g}$ se cumpla es: *Supuesto 1*. Sea y_t un proceso con covarianzas estacionarias que satisface $E|y_t|^s < \infty$ para algún $s > 4$ y para toda t, y es L_2-NED de tamaño -1/2 en un proceso U_t, donde U_t es un proceso *mixing* α de tamaño $-s/(s-4)$, véase De Jong y Davidson [2000] para más detalles.

donde el *ij*-ésimo elemento de T está dado por (1). Suponiendo que se conoce T, H_K: $\boldsymbol{r} = 0$ puede ser probada utilizando un estadístico de prueba de la forma $nr'T^{-1}r$, el cual asintóticamente sigue una distribución χ^2_K cuando H_K es cierta. Una prueba factible puede obtenerse si se reemplaza a T con un estimador de ésta o con una matriz conocida.

La idea con este estimador es estimar a T explotando las restricciones impuestas por la hipótesis nula. Bajo H_K, la matriz T se simplifica a $\tilde{T} = \left\{\gamma(0)^{-2}\tilde{C}\right\}$ donde $\tilde{C}$ tiene como su *ij*-ésimo elemento a:

$$\tilde{C}_{ij} = \sum_{d=-\infty}^{\infty} E\left[(y_t-\mu)(y_{t-i}-\mu)(y_{t+d}-\mu)(y_{t+d-j}-\mu)\right],$$

$$i,j = 1,\ldots,K$$

El estadístico $\tilde{Q}_K$ estima a T sin hacer supuestos sobre el proceso que generó la serie de tiempo, y es de la forma $nr'\hat{\tilde{T}}^{-1}r$ donde $\hat{\tilde{T}}$ es un estimador consistente de $\tilde{T}$ bajo H_K. Como se muestra más adelante, $\tilde{Q}_K$ es asintóticamente distribuido χ^2_K cuando H_K es verdadera. Un estimador consistente puede obtenerse utilizando a $\hat{g}(0)$ para estimar a $\gamma(0)$ y un estimador no paramétrico de la matriz $\tilde{C}$. Debido a que la matriz $\tilde{C}$ es la matriz de densidad espectral en la frecuencia cero del proceso w_t bajo H_K, un estimador de $\tilde{C}$ no paramétrico consistente en el ámbito del tiempo está dado por:

$$\hat{\tilde{C}} = \sum_j K\left(\frac{j}{\ell}\right) g(j) = \frac{1}{n}\sum_j \sum_t K\left(\frac{j}{\ell}\right) \hat{w}_t \hat{w}'_{t-j},$$

donde $g(j) = \frac{1}{n}\sum_t \hat{w}_t \hat{w}'_{t-j}$, con $\hat{w}_t$ definido como se explicó, y donde $\ell > 0$ es el parámetro de suavizado o *bandwidth parameter* y $k(\bullet)$ es la funión kernel.

Suponemos que la función kernel y el parámetro de suavizado satisfacen los siguientes supuestos:

Supuesto 2. El *kernel* $k(\bullet)$ pertenence a K donde K es la clase de funciones $K = \{k(\bullet): \mathbb{R} \to [-1,1]\}$ la cual es simétrica alrededor de cero, continua en cero y en todos los puntos excepto en un número finito de ellos y satisface:

$$k(0) = 1, \int_{-\infty}^{\infty} |k(x)|dx < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\xi)|d\xi < \infty,$$

donde $\psi(\xi) = (2ð)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} k(\mathrm{x})\mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{dx}$.

Supuesto 3. El parámetro de suavizado satisface $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ell}+\frac{\ell}{n}\right)=0$.

El siguiente lema, cuya demostración es una aplicación directa del teorema 2.1 de Davidson y De Jong [2000]), establece la consistencia del estimador no paramétrico de $\tilde{C}$.

Lema 3. Si se cumplen los 3 supuestos anteriores y la hipótesis nula H_K, entonces $\hat{\tilde{C}} \xrightarrow{p} \tilde{C}$.

Finalmente, el siguiente lema establece las propiedades asintóticas del estadístico de prueba $\tilde{Q}_K$, es decir, su distribución asintótica nula y su consistencia.

Lema 4. Si se cumplen los 3 supuestos y la hipótesis nula H_K, el estadístico de prueba $\tilde{Q}_K$ converge en distribución a la de una χ^2_K , y cuando $\rho \neq 0$, $\tilde{Q}_K$ diverge.

La primera parte del lema 4 es obvia debido a que $\hat{\tilde{T}}$ es un estimador consistente de $\tilde{T}$, es decir, de la matriz de varianzas-covarianzas de las autocorrelaciones muestrales r bajo H_K. En la segunda parte, utilizando el teorema ergódico, el estimador de $\tilde{T}$ converge en probabilidad a una matriz definida positiva y al menos un elemento de r es una variable aleatoria no degenerada y, por lo tanto, $\tilde{Q}_K$ diverge.